Pautas Pruebas

Jueves 21 de Octubre de 2010

Primer Día

Problema 1

Desarrollo 1:
Basta notar que al final del proceso:

- Toda la leche que no esta en la taza de leche está en la taza de té
- Toda el té que no esta en la taza de té está en la taza de leche
- Al final ambas tazas tienen el mismo volumen de líquido

Con lo anterior nos damos cuenta que cada taza tiene lo que le falta a la otra, entonces, la taza de leche tiene la misma cantidad de té que la cantidad de leche que tiene la taza de té. Entonces la respuesta a las tres preguntas es que la cantidad es la misma, independiente si se revuelve bien o no.

Desarrollo 2:

Se puede hacer mediante proporciones, pero con eso sólo se pueden responder las dos primeras preguntas.

Problema 2

Para la segunda desigualdad basta notar que el numero máximo de monedas debe satisfacer la restricción dada por el área de la mesa, es decir:

$$N\pi r^2 \leq \pi R^2$$

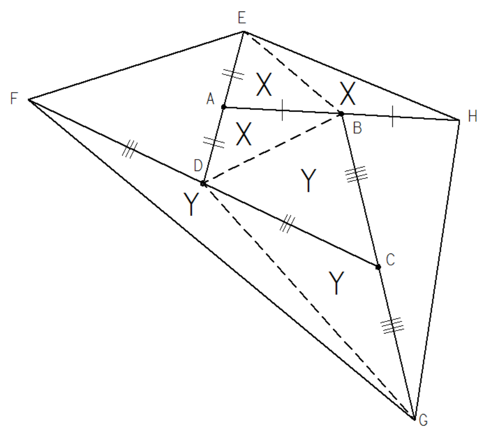
despejando se obtiene la desigualdad.

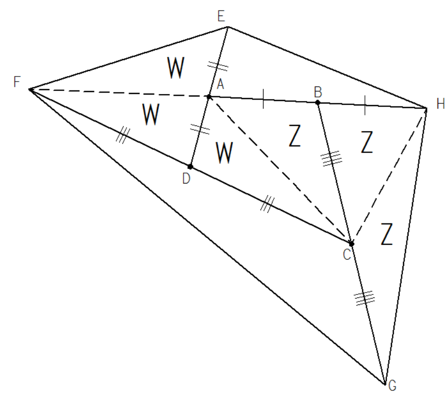
Para la primera desigualdad se requiere un poco más de trabajo, supongamos que la mesa tiene colocadas monedas me manera que ya no caben más, entonces si en un punto de la mesa no hay una moneda y si este punto no esta cerca del borde de la mesa (a una distancia mayor a r del borde) entonces este punto debe estar a una distancia menor a r de alguna de las monedas, pues en caso contrario podemos colocar otra moneda centrada en ese punto y por suposición colocamos monedas hasta que no quepan más. Ahora usando la sugerencia supongamos que se hacen crecer las monedas a monedas de radio $2r$ (podrían quedar sobrepuestas), por lo anterior estas ahora cubren toda la mesa exceptuando quizás algún punto cerca del borde, es decir cubren un disco de radio $R-r$ con el mismo centro que la mesa,dicho de otra forma el área de las monedas grandes es mayor al área de un disco de radio $R-r$, es decir:

$$N\pi(2r)^2 \geq \pi(R-r)^2 \Rightarrow N \geq \frac{1}{4}\left(\frac{R-r}{r}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{N} \geq \frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}-1\right)$$

Lo cual prueba la primera desigualdad

Problema 3





Primero trazamos algunas rectas auxiliares, el segmento BE el segmento BD y el segmento DG. Ahora notamos que los triángulos $\triangle HBE$ y $\triangle BAE$ tienen la misma base y la misma altura, entonces tienen la áreas de la misma forma. De la misma forma los triángulos $\triangle DAB$ y $\triangle BAE$ tienen la misma base y la misma altura, entonces tienen la misma área. De manera similar se concluye para los triángulos $\triangle BCD$, $\triangle DCG$ y $\triangle FDG$ tienen la misma área. Con esto se puede concluir que Área$(\triangle HAE)$ + Área$(\triangle FCG) = 2$ Área$(ABCD)$. De igual forma se concluye para el los triángulos $\triangle DFE$ y $\triangle GBH$.

$\therefore$ Área$(EFGH) = 5$ Área$(ABCD)$

Segundo Día

Problema 1

$$p^2 = 2^n + 1 \Rightarrow p^2 - 1 = 2^n \Rightarrow (p+1)(p-1) = 2^n$$

Entonces tenemos que el producto de dos numeros naturales es una potencia de 2, entonces usando que todo numero tiene una única descomposición en factores primos se obtiene que ambos numero deben ser potencias de 2. Entonces si decimos $p+1 = 2^k$ y $p-1 = 2^\ell$ se tiene que $2^k = 2 + 2^\ell$ dividiendo por 2
$2^{k-1} = 1 + 2^{\ell-1}$
notamos que el lado izquierdo es par, entonces el lado derecho debe ser par, esto implica que $2^{\ell-1} = 1$ entonces $\ell = 1$, sustituyendo en las expresiones anteriores se obtiene que $p = 3$ y por consiguiente $n = 3$, la cual es la única solución al problema.

Problema 2

Desarrollo 1:

De la tercera ecuación obtenemos que hay dos posibilidades, o todos son positivos o hay dos negativos y un positivo. Supongamos que $a > 0$,$b < 0$, $c < 0$. Multiplicando la primera ecuación por b se obtiene

$$ab + b^2 + bc < 0$$

multiplicando la segunda ecuación por -1 se obtiene

$$-ab - bc - ac < 0$$

sumando ambas ecuaciones obtenemos

$$b^2 < ac < 0$$

Contradicción. Entonces el único caso posible es que a, b, c sean positivos.

Desarrollo 2:

Este desarrollo es un poco más complicado pero tiene la ventaja que puede extenderse al caso de cualquier número de variables.
Consideramos el polinomio

$$p(x) = (x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ac)x - abc$$

el cual tiene raíces a, b y c. Si reemplazamos x por $-x$ obtenemos

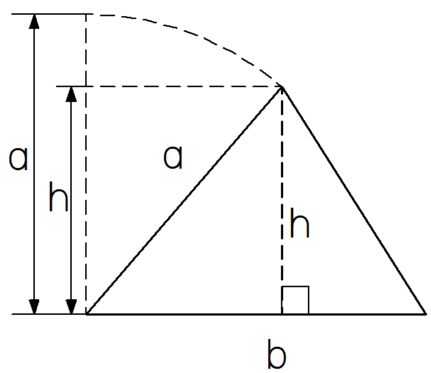
$$p(-x) = -x^3 - (a+b+c)x^2 - (ab+bc+ac)x - abc$$

el cual no tiene cambios de signos, entonces no puede tener raíces negativas. Esto obliga a que todas las raíces sean positivas, lo cual implica que a, b y c son positivos

Problema 3

1) Usamos que el área de triángulo está dada por $\frac{bh}{2}$ por la explicación dada en la figura notamos que $a \geq h$ entonces

$$A = \frac{bh}{2} \leq \frac{ab}{2}$$



2) Para el caso del cuadrilátero basta notar que si dividimos el cuadrilátero por la diagonales y usando la parte 1) se obtiene que

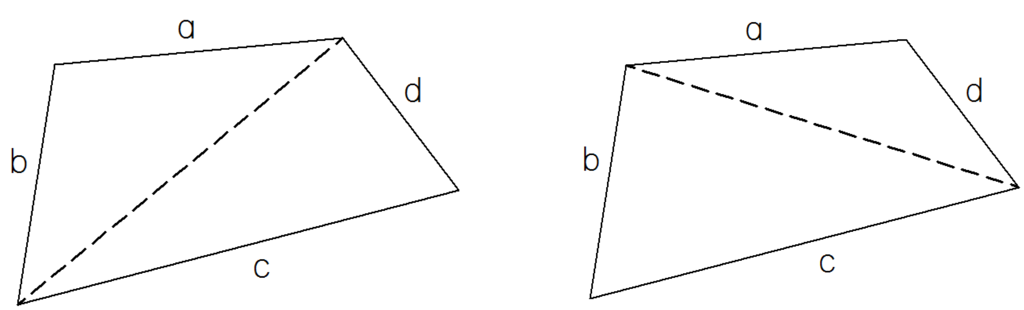
$$A \leq \frac{ab}{2} + \frac{cd}{2}$$

y dividiendo por la otra diagonal se obtiene que

$$A \leq \frac{ad}{2} + \frac{bc}{2}$$

Sumando ambas desigualdades y dividiendo por 2 obtenemos que

$$A \leq \frac{ad}{4} + \frac{bc}{4} + \frac{ab}{4} + \frac{cd}{4} = \frac{(a+c)(b+d)}{4}$$



Problema 4

Notemos que le problema es equivalente a decir que el promedio de los 20 es mayor o igual a 14. Consideremos los 20 mayores, entonces el promedio de sus edades ($\bar{x}$) debe ser mayor o igual que el de los otros 11 ($\bar{y}$), si el promedio de los 20 primeros fuera menor que 14 entonces el de los otros 11 también lo serían. Por otra parte el promedio de las 31 lo podemos reescribir como $\frac{20\bar{x}+11\bar{y}}{31} < 14$ pues $\bar{x}$ y $\bar{y}$ son menores que 14, pero por suposición el promedio de todos es $\frac{434}{31} = 14$ contradicción!!.
$\therefore$ El promedio de los 20 mayores es mayor o igual 14, es decir, la suma de los primeros 14 es mayor o igual a 280.